«Жизнь» - игра Дж. Конуэя

(J. Conway)

Пётр Процик – декабрь 2004

Большая часть работ известного математика Дж. Конуэя относится к области чистой математики. В 1967 году он открыл новую группу – её иногда называют «созвездием Конуэя» - включавшую в себе в качестве подгрупп все известные к тому времени «спорадические» группы, кроме двух. («Спорадическими» эти группы были названы потому, что они не укладывались ни в какую известную классификацию.). Открытие Конуэя имело первостепенное значение не только для теории групп, но и для теории чисел.

Помимо серьёзных исследований, Конуэй увлекался также занимательной математикой. В этой области ему принадлежит немало работ, однако публикует он свои «занимательные» результаты чрезвычайно редко. Одним из исключений такого рода была статья Конуэя о «стеганом одеяле миссис Перкинс», посвященная одной задаче на разрезание. Другой его находкой явилась топологическая игра «Спрут», которую Конуэй придумал вместе с М.С. Паттерсоном.

Одним из последних достижений Д.Ж. Конуэя является игра, названная им «Жизнь». Возникающие в процессе игры ситуации очень похожи на реальные процессы, происходящие при зарождении, развитии и гибели колоний живых организмов. По этой причине «Жизнь» можно отнести к быстро развивающейся категории так называемых «моделирующих игр» - игр, которые в той или иной степени имитируют процессы, происходящие в реальной жизни.

Основная идея игры состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь простого расположения фишек (организмов), расставленных по различным клеткам под действием «генетических законов» Конуэя, которые управляют рождением, гибелью и выживанием фишек. Конуэй тщательно подбирал свои правила и долго проверял их «на практике», добиваясь, чтобы они по возможности удовлетворяли трём условиям:

1) не должно быть ни одной исходной конфигурации, для которой существовало бы простое доказательство возможности неограниченного роста популяции;
2) в то же время должны существовать такие начальные конфигурации, которые заведомо обладают способностью беспредельно развиваться;
3) должны существовать простые начальные конфигурации, которые в течении значительного промежутка времени растут, претерпевают разнообразные

изменения и заканчивают свою эволюцию одним из следующих трех способов: полностью исчезают (либо из-за перенаселения, т.е. слишком большой плотности фишек, либо наоборот, из-за разреженности фишек, образующих конфигурацию); переходят в устойчивую конфигурацию и перестают изменяться вообще или же, наконец, выходят на колебательный режим, при котором они совершают некий бесконечный цикл превращений с определенным периодом.

Короче говоря, правила игры должны быть такими, чтобы поведение популяции было достаточно интересным, а главное, непредсказуемым.

Генетические законы Конуэя удивительно просты. Прежде чем мы их сформулируем, обратим внимание на то, что каждую клетку доски (которая, вообще говоря, считается бесконечной) окружают восемь соседних клеток: четыре имеют с ней общие стороны, а четыре другие – общие вершины. Правила игры (генетические законы) сводятся к следующему:

1) *выживание*. Каждая фишка, у которой имеются две или три соседние фишки, выживает и переходит в следующие поколение;
2) *гибель*. Каждая фишка, у которой оказывается больше трех соседей, погибает, т.е. снимается с доски, из-за перенаселённости. Каждая фишка, вокруг которой свободны все соседние клетки или же занята только одна клетка, погибает от одиночества.
3) *рождение.* Если число фишек, с которыми граничит какая-нибудь пустая клетка, в точности равно трем (не больше и не меньше), то на этой клетке происходит рождение нового «организма», т.е. следующим ходом на неё ставиться одна фишка.

Важно понять, что гибель и рождение всех «организмов» происходят одновременно. Вместе взятые, они образуют поколение или, как мы будем говорить один «ход» в эволюции начальной конфигурации. Ходы Конуэя рекомендуется делать следующим образом:

1) начать с конфигурации, целиком состоящей из черных фишек;
2) определить какие фишки должны погибнуть, и положить на каждую из обреченных фишек по одной черной фишке;
3) найти все свободные клетки, на которых должны произойти акты рождения, и на каждую из них поставить по одной фишке белого цвета;

4) выполнив все эти указания, ещё раз внимательно проверить, не сделано ли каких-либо ошибок, затем снять с доски все погибшие фишки (т.е. столбики из двух фишек), а все новорожденные (белые фишки) заменить черными фишками.

Проделав все операции, вы получите первое поколение в эволюции первоначальной конфигурации. Аналогичным образом получаются все последующие поколения. Теперь уже ясно, для чего нам нужны фишки двух цветов: поскольку рождение и гибель «организмов» происходят одновременно, новорожденные фишки никак не влияют на гибель и рождение остальных фишек, и поэтому, проверяя новую конфигурацию, необходимо уметь отличать их от «живых» фишек, перешедших из предыдущего поколения.

В процессе игру сразу видно, что популяции непрестанно претерпевают необычные, нередко очень красивые и всегда неожиданные изменения. Иногда первоначальная колония организмов постепенно вымирает, т.е. все фишки исчезают, однако произойти это может не сразу, а лишь после того, как сменится очень много поколений. В большинстве своём исходные конфигурации либо переходят в устойчивые (последние Конуэй называет «любителями спокойной жизни») и перестают изменяться, либо навсегда переходят в колебательный режим. При этой конфигурации, не обладавшие в начале игры симметрией, обнаруживают тенденцию к переходу в симметричные формы. Обратенные свойства симметрии в процессе дальнейшей эволюции не утрачиваются, а симметрия конфигурации может лишь обогащаться.

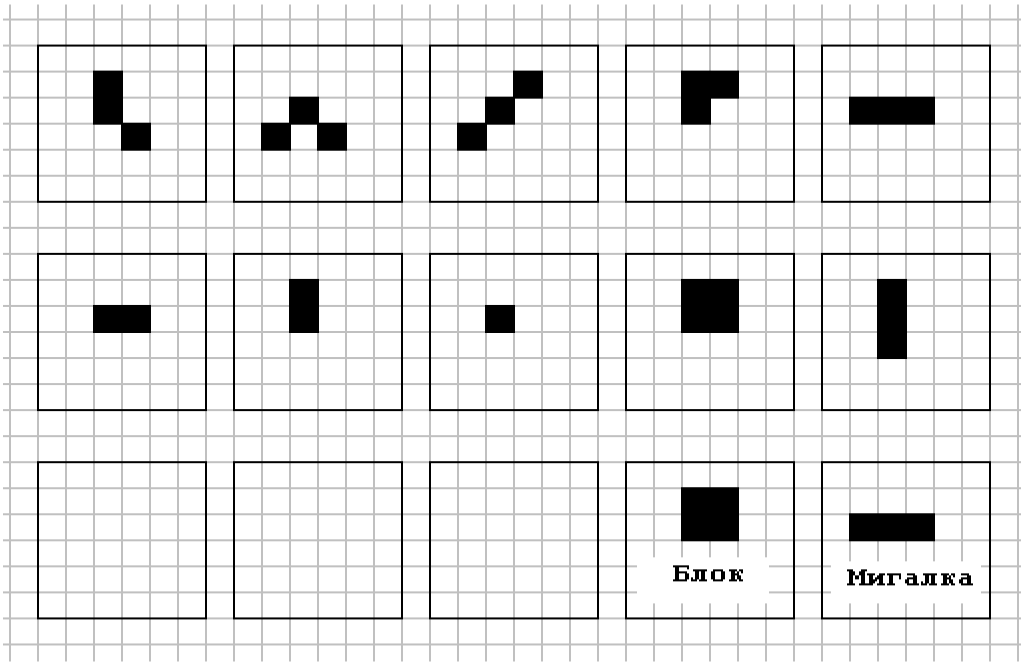
Конуэй высказал гипотезу, согласно которой не существует ни одной начальной конфигурации, способной беспредельно расти. Иначе говоря, любая конфигурация, состоящая из конечного числа фишек, не может перейти в конфигурацию, у которой число фишек превосходило бы некий конечный верхний предел. Это, наверное, наиболее глубокая и самая сложная задача, возникающая в игре «Жизнь».

В своё время Конуэй предлагал премию в 50 долларов тому, кто до конца 1970 года первым докажет или опровергнет его гипотезу. Опровергнуть предположение Конуэя можно было бы, например, построив конфигурацию, к которой, следуя правилам игры, все время приходилось бы добавлять новые фишки. К ним можно отнести, в частности, «ружьё» (конфигурацию, которая через определённое число ходов «выстреливает» движущиеся фигуры вроде «глайдера», о котором будет сказано далее) или «паровоз, пускающий дым из трубы» (движущаяся конфигурация, оставляющая за собой «клубы дыма»).

Рассмотрим теперь, что же происходит с некоторыми простыми конфигурациями.

Одиночная фишка, а также любая пара фишек, где бы они ни стояли, очевидно, погибают после первого же хода.

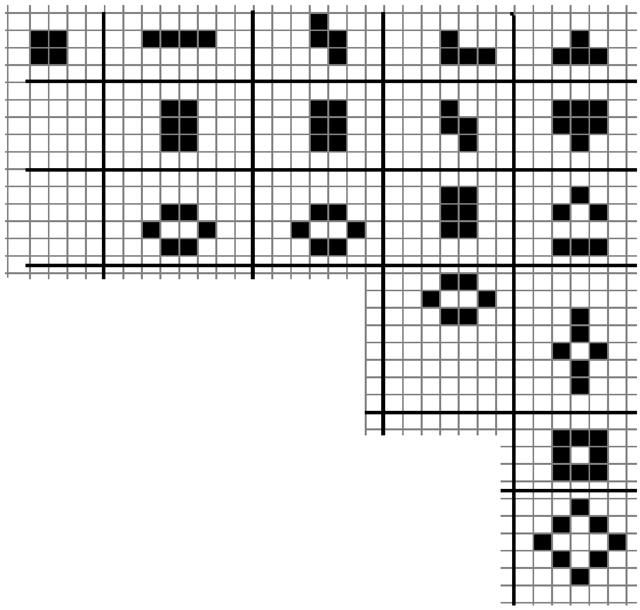
Исходная конфигурация из трех фишек (мы будем называть их триплетом), как правило погибает. Выживает триплет лишь в том случае, если по крайней мере одна фишка граничит с двумя занятыми клетками. Пять триплетов, не исчезающих на первом же ходу изображены на рисунке:



При этом ориентация триплетов, т.е. как они расположены на плоскости не играет роли. Можно заметить, что любой диагональный ряд фишек, каким бы длинным он ни оказался, с каждым ходом теряет стоящие на его концах фишки и конце концов совсем исчезает.

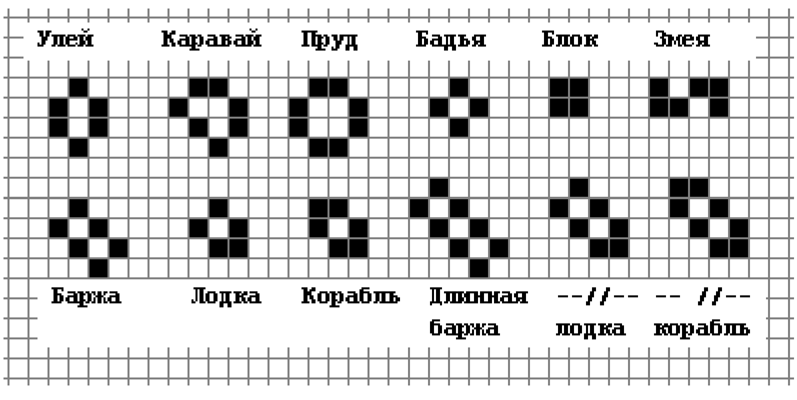
Скорость, с которой шахматный король перемещается по доске в любом направлении, Конуэй называет «скоростью света». Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что любой диагональный ряд фишек распадается с концов со скоростью света.

На следующем рисунке изображена эволюция пяти тетрамино (четыре клетки, из которых состоит элемент тетрамино, связанны между собой ходом ладьи).



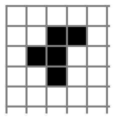
Как легко видеть, квадрат относиться к категории «любителей спокойной жизни». Конфигурации 2 и 3 после второго хода превращаются в устойчивую конфигурацию, называемую «ульем». Отметим попутно, что «ульи» возникают в процессе игры довольно часто. Тетрамино, изображенное на рисунке четвертым, также превращается в улей, но на третьем ходу. Особый интерес представляет последнее тетрамино, которое после девятого хода распадается на четыре отдельные «мигалки». (На рисунке изображено первых пять ходов). Вся конфигурация носит название «навигационные огни», или «светофоры». «Светофоры» относятся к разряду флип-флопов и возникают в игре довольно часто.

На следующем рисунке представлены 12 наиболее часто встречающихся конфигураций из числа «любителей спокойной жизни»



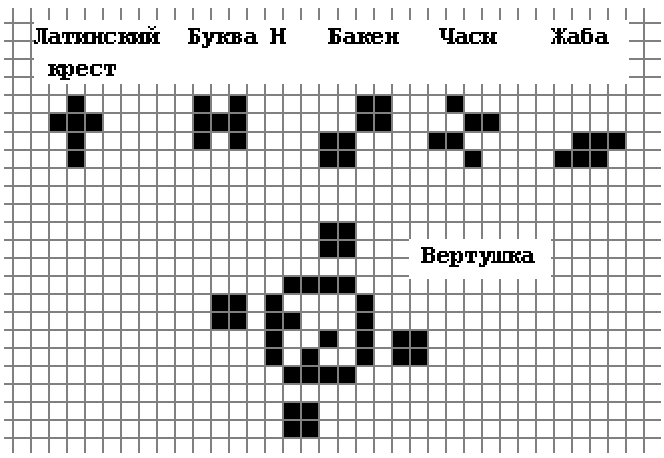
Фигуры, состоящие из пяти фишек, связанных между собой так, что их клетки можно обойти ходом ладьи, называют пентамино. Таких фигур 12. Оказывается, что пять из них на пятом ходу погибают, две быстро переходят в устойчивые конфигурации из семи фишек, а четыре после небольшого числа ходов превращаются в «навигационные огни».

Единственным исключением в этом смысле является элемент пентамино, имеющий форму буквы Г :



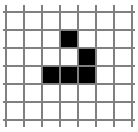
Конуэй проследил развитие г-образного пентамино вплоть до 460 хода, после которого данная конфигурация распалась на множество «глайдеров». Конуэй пишет, что «от фигуры осталось множество мертвых (не изменяющихся) обломков и лишь несколько малых областей, в которых ещё все ещё теплилась жизнь, так что отнюдь не очевидно, что процесс эволюции должен происходить бесконечно долго». Более поздние исследования показали, что оно превращается в периодически пульсирующую конфигурацию с периодом, равным двум, лишь после 1103 ходов. При этом шесть возникших на доске «глайдеров» удаляются от центра на всё большее и большее расстояние, и в конце концов вокруг бывшего пентамино остаются четыре «мигалки», один «корабль», одна «лодка», один «каравай», четыре «улья» и восемь «блоков». Этот результат впервые был получен Г. Филипски и Б. Морганом из университета Кэйса, позднее его подтвердили несколько групп исследователей в США и в других странах.

В качестве упражнений интересно проследить за эволюцией следующих фигур:



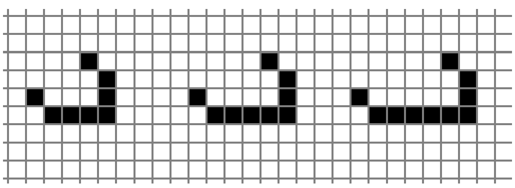
Последние три фигуры были обнаружены С. Нортоном. Если перекладину в букве «Н» поднять на одну клетку вверх, чтобы получились «ворота» (или, как называет эту конфигурацию Конуэй, прописная буква «пи»), то произойдут совершенно неожиданные изменения. В противоположность букве «Н», эволюция которой заканчивается достаточно быстро, «ворота» оказываются весьма долгоживущей конфигурацией. Лишь после 173 ходов она распадается на пять «мигалок», шесть «блоков» и два «пруда». Конуэй проследил также эволюцию всех элементов гексамино и всех элементов гептамино, за исключением семи. При этом некоторые из элементов гексамино оказываются вовлеченными в эволюцию г-пентамино; например, этот элемент пентамино превращается в гексамино на первом ходу.

Одним из самых замечательных открытий Конуэя следует считать конфигурацию из пяти фишек под названием «глайдер»:

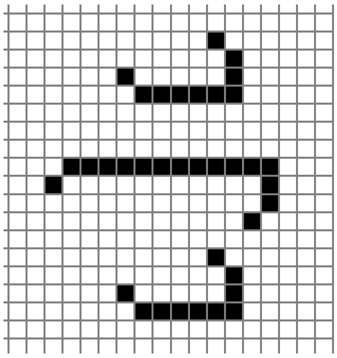


После второго хода «глайдер» немного сдвигается и отражается относительно диагонали. В результате последующих ходов «глайдер» выходит на прежний курс и сдвигается на одну клетку вправо и на одну клетку вниз относительно начальной позиции. Выше уже отмечалось, что скорость шахматного короля в игре «Жизнь» принято называть скоростью света. Выбор Конуэя пал именно на этот термин из-за того, что в изображенной им игре большие скорости просто не достигаются. Ни одна конфигурация не воспроизводит себя достаточно быстро, чтобы двигаться с подобной скоростью. Конуэй также доказал, что максимальная скорость по диагонали составляет одну четверть скорости света. Поскольку «глайдер» воспроизводит себя сам после четырех ходов и при этом опускается на одну клетку по диагонали, то говорят, что он скользит по полю со скоростью, равной одной четвертой скорости света.

Конуэй также показал, что скорость любой конечной фигуры, перемещающейся по вертикали или по горизонтали на свободные клетки, не может превышать половину скорости света. На рисунке показаны три «космических корабля» :



Все они передвигаются горизонтально слева направо со скоростью, равной половине скорости света. Конуэй обнаружил, что более длинным «космическим кораблям» (которые он назвал «сверхтяжелыми») необходим эскорт из двух или большего числа «кораблей» меньших размеров:



Игра «Жизнь» и клеточные автоматы

Теория клеточных автоматов берёт своё начало с середины пятидесятых годов, когда Джон фон Нейман поставил перед собой задачу доказать возможность существования самовоспроизводящихся автоматов. Если такую машину снабдить надлежащими инструкциями, она построит точную копию самой себя. В свою очередь обе машины смогут построить ещё две; четыре машины построят восемь и т.д. Нейман впервые доказал возможность существования таких машин.

В доказательстве Неймана существенно использовалось понятие «однородного клеточного пространства», эквивалентного шахматной доске бесконечных размеров. Каждая клетка такого пространства может находиться в любом, но конечном числе «состояний», в том числе и в состоянии покоя (называемом пустым, или нулевым, состоянием). На состояние любой клетки оказывает воздействие конечное число соседних клеток. Во времени эти состояния пространства изменяются дискретно, в соответствии с некоторыми «правилами перехода», которые необходимо применить к этим клеткам. Клетки соответствуют основным частям автомата с конечным числом состояний, а конфигурация из «живых» клеток – идеализированной модели такого автомата. Именно в таком клеточном пространстве и развертывается действие придуманной Конуэем игры «Жизнь». Соседними для каждой клетки в «Жизни» считаются 8 непосредственно окружающих её клеток. Каждая клетка может находиться в двух состояниях (либо на ней стоит фишка, либо она пуста). При этом правила перехода определяются генетическими законами Конуэя – рождением, гибелью и выживанием фишек. Применяя правила перехода к пространству, каждая клетка которого могла находиться в 29 состояниях и имела 4 соседние клетки (примыкающие к данной по вертикали и горизонтали), Нейман доказал существование самовоспроизводящихся конфигурации, состоящей примерно из 200 000 клеток.

Причина столь чудовищных размеров конфигурации объяснялась тем, что Нейман намеревался применить свое доказательство к реальным автоматам и специально подобрал клеточное пространство, способное имитировать машину Тьюринга. «Погрузив» универсальную машину Тьюринга в созданную им конфигурацию, Нейман получил возможность создать универсальный конструктор, способный построить любую конфигурацию в пустых клетках пространства, в том числе и точную копию самого себя. За время прошедшее после смерти Неймана предложенное им доказательство существования самовоспроизводящихся систем удалось значительно упростить. Рекордным по простоте явилось доказательство найденное выпускником инженерного факультета Массачусетского технологического университета Э. Р. Бэнксом. В нем используются ячейки, которые могут находиться лишь в четырёх состояниях.

Самовоспроизведение в тривиальном смысле – без использования конфигураций, включающих в себя машину Тьюринга, - добиться легко. Удивительно простой пример «тривиальной» самовоспроизводящейся системы предложил примерно в 1960 г. Э. Фридкин, также из МИТ. В этой системе ячейки могут находиться лишь в двух состояниях, причем любая из них, как и в примере Неймана, имеет четырех соседей, а правила перехода сводятся к следующему. Каждая клетка, имеющая в момент времени ***t*** четное число живых соседей, в момент времени ***t+1*** становиться пустой. Каждая клетка, имеющая в момент времени ***t*** нечетное число соседей, в следующий момент времени становиться живой, т.е. переходит в ненулевое состояние или сохраняет его, если она уже в нем находилась.

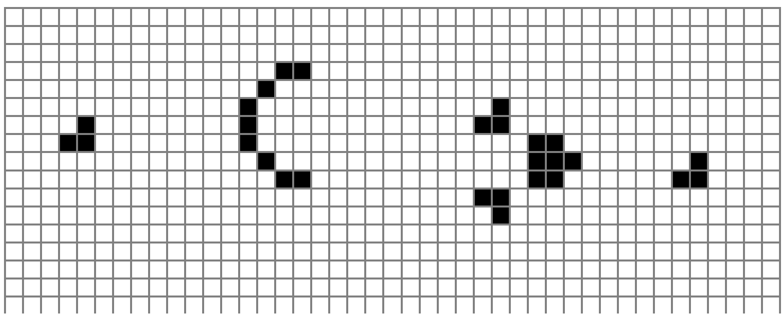
Среди наиболее значительных вкладов в теорию клеточных автоматов самую громкую известность получил предложенный Э.Ф. Муром способ доказательства существования конфигураций, которые Дж. У. Тьюки назвал «садами Эдема». Эти конфигурации не могут возникать в процессе игры, поскольку никакая предшествующая конфигурация отличного от них типа не может их породить. «Сады Эдема» должны быть заданы с самого начала – в нулевом поколении. Поскольку конфигурации такого типа не имеют «предшественников», они не могут быть самовоспроизводящимися. Подробно метод Мура изложен в его статье «Математика в биологических науках», опубликованной в *Scientific American* (September, 1964). Более строгое изложение этого метода приведено в сборнике по редакцией А. Беркса. (Essays on Cellular Automata. Ed. by Arthur W. Bruks, - University of Illinois Press , 1970)

Первая конфигурация типа «сад Эдема» была обнаружена Р. Бэнксом в 1971 году. Это потребовало от него обширного компьютерного поиска самых разнообразных конфигураций-предшественников. Ограничивающий этот «сад» прямоугольник (9x33) содержит 226 клеток.

Хотя любая конфигурация в игре «Жизнь» порождает только одну конфигурацию-наследника, обратное вообще говоря, неверно, поскольку у данной конфигурации может оказаться две или несколько конфигураций-предшественников. С этим, в частности, связана основная трудность машинного поиска комбинации типа «сад Эдема» - ведь необходимо просмотреть всех возможных предшественников на каждом обратном ходе.

А теперь несколько слов о поразительных результатах полученных при анализе игры Конуэя. Сам автор игры был прекрасно осведомлён об опыте своих предшественников при разработке такого рода игр. Поэтому он, учтя все их достоинства и недостатки, при выборе своих рекурсивных правил (генетических законов) постарался прежде всего избежать двух крайностей: слишком большого числа конфигураций с быстрым и неограниченным ростом, а также слишком большого числа конфигураций, которые быстро исчезают. Приняв во внимание все эти факторы, он сумел разработать игру, отличающуюся удивительной степенью непредсказуемости и порождающую такие замечательные объекты, как пульсирующие конфигурации и мчащиеся космические корабли. В своё время Конуэй высказал предположение о том, что не существует ни одной исходной конфигурации, состоящей из конечного числа фишек, которая могла бы беспредельно расти, пообещав награду тому, кто либо докажет, либо опровергнет это предположение.

В ноябре 1970 года Конуэю пришлось выдать обещанную премию группе математиков из Массачусетского технологического института, занимавшейся проблемами искусственного интеллекта. В эту группу входили Р. Эйприл, М. Биллер, Р.У. Госпер, Р. Хауэлл, Р. Шроппель и М. Спесинер. Ими было обнаружено «ружьё», стреляющее «глайдерами». На рисунке изображена такая конфигурация:

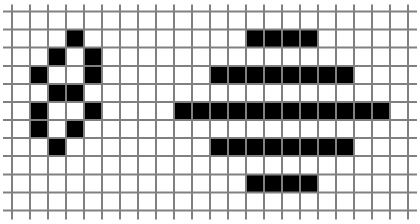


На сороковом ходу из «ружья» вылетает первый «глайдер», через каждые 30 ходов – следующий и так до бесконечности. С появлением каждого «глайдера» число фишек на доске увеличивается на 5, в результате чего происходит неограниченный рост популяции.

Самыми эффектными из новых достижений, полученных в последнее время при анализе игры «Жизнь», являются результаты по исследованию «глайдеров» и их столкновений. Кроме того, были обнаружены новые типы «глайдерных ружей» и более компактные «заводы космических кораблей», порождаемые в результате катастроф «глайдеров», а также бесчисленное множество новых форм «Жизни», поглощающих «глайдеры» или отражающих их обратно под разными углами.

Чистый «генератор глайдеров» должен представлять собой конфигурацию, которая порождает один или несколько «глайдеров», не оставляя после себя никакого «мусора».

Два изящных примера подобного рода, найденных специалистами из фирмы Honeywell представлены ниже:



«Глайдерное ружьё» позволило его создателям совершить много других замечательных открытий. Например, при столкновении 13 «глайдеров» возможно появление «глайдерного ружья». Та же группа исследователей обнаружила «пентадекатлон» - пульсирующую конфигурацию с периодом, равным 15, способную «поглотить» любой сталкивающийся с ней «глайдер». «Пентадекатлон» может также отражать «глайдеры», изменяя курс последнего на 180 градусов.

Одной из самых замечательных форм «Жизни», обнаруженных группой из МИТ, является так называемый «размножитель». Основная и наиболее впечатляющая особенность этой конфигурации состоит в чрезвычайно быстром росте её популяции. «Размножитель» состоит из десяти «паровозов, пускающих дым из трубы» и движущихся на восток, причем их «клубы дыма» синхронизированы между собой таким образом, что они порождают целый поток «глайдеров», которые, рассыпаясь на части, в свою очередь образуют «ружья».

Создание «глайдерных ружей» открывает удивительную возможность, используя игру Конуэя, смоделировать машину Тьюринга – универсальную вычислительную машину, способную (по крайней мере, в принципе) производить все те действия, которые только доступны самым совершенным из современных ЭВМ. Идея заключается в том, чтобы использовать «глайдеры» в качестве единичных импульсов для хранения и передачи информации, а также для выполнения необходимых логических операций, допускаемых схемными элементами реальных вычислительных машин. Если с помощью игры Конуэя окажется возможным создать машину Тьюринга, то сразу же встаёт вопрос о создании универсального конструктора, позволяющего создавать такие машины, которые могли бы полностью копировать и воспроизводить самих себя. До сих пор никому не удалось «построить» машину Тьюринга в пространстве, клетки которого могут находиться в двух состояниях, а «соседство» клеток понимается по Конуэю. Вместе с тем, ранее было доказано, что в пространстве, все клетки которого могут находиться в двух состояниях, а «близость» клеток понимается по Нейману, построить машину Тьюринга невозможно.

Наиболее практичным приложением теории клеточных автоматов, как считает Бэнкс, являются, по-видимому, вопросы разработки электронных цепей, способных к самовосстановлению, а также проектирования различных специальных типов электронного оборудования.

В 1971 году независимо друг от друга Госпер в МИТ и Конуэй в Кембридже «универсализировали» пространство игры «Жизнь», подтвердив возможность использования «глайдеров» в качестве носителей информации с целью моделирования машины Тьюринг. Подробное объяснение можно найти во втором томе книги Конуэя «Winning ways», написанной им в соавторстве с Э. Берлекампом и Р. Гаем.

Универсальность игры «Жизнь» означает, что, в принципе, мы можем использовать движущиеся «глайдеры» для выполнения любых вычислений. Например, можно составить такую комбинацию из «глайдерных ружей», «пожирателей» и других форм «Жизни», что образующийся в результате поток «глайдеров» будет «вычислять» числа е и «пи», квадратный корень из 2 или любое другое действительной число с произвольным количеством десятичных знаков после запятой. Конечно, производить вычисления подобным способом крайне неэффективно, тем не менее, в принципе, их вполне можно осуществить, если вы располагаете достаточно большим игровым полем и у вас хватает мастерства, выдумки и изобретательности для построения необходимой «машины».

В своей книге Конуэй использует великую теорему Ферма для иллюстрации вычислительных возможностей игры «Жизнь», а также описания характерных для неё ограничений. Так, например, мы можем построить машину, которая будет последовательно проверять значения всех четырех переменных в знаменитом соотношении Ферма. При этом машину можно составить таким образом, что она будет давать остановку(скажем, путём вывода нулевой конфигурации, или пустого поля), как только будет найден контрпример, опровергающий гипотезу Ферма. С другой стороны, если предположение Ферма справедливо, что машина будет продолжать поиск до бесконечности, пока не обнаружит, наконец, требуемую комбинацию чисел. Правда, в то же время из теоремы неразрешимости известно, что не существует способа узнать заранее, будет ли данная конфигурация в игре «Жизнь» продолжать развиваться или же она перейдет в некоторое устойчивое состояние.

Конуэй утверждает также, что он доказал существование таких комбинаций, которые могут двигаться в произвольно заданном направлении, характеризуемом некоторым рациональным числом, воспроизводя свою первоначальную структуру после определённого числа ходов.

Игра «Жизнь» может иметь различные практические применения. Так, были попытки использовать её для анализа социально-экономических систем. Кроме того, высказывалось предположение, что дальнейшие обобщения могут помочь понять, почему некоторые небесные туманности имеют спиральные ветви. А. Аппель и А. Стайн из фирмы IBM нашли способ применения правил, аналогичных правилам игры «Жизнь», в программах, предназначенных для выяснения, какие грани нарисованного на экране ЭВМ пространственного объекта являются для нас невидимыми.

И в заключение представляю список литературы:

1. М. Гарднер, Крестики-нолики. М.: Мир, 1988. – 352 с., ил.

О теории клеточных автоматов

2. Neumann J. v. Theory of Self-Replicating Automata. – University of Illinois Press, 1966
3. Minsky M. L. Computation: Finite and Infinite Machines. – Prentice-Hall, 1967
4. Codd E.F. Cellular Automata. – Academic Press, 1968
5. Arbib M.A. Theories of Abstract Automata. – Prentice-Hall, 1969.
6. Essays on Cellular Automata. Ed. A. W. Burks – University on Illinois Press, 1970

Об игре «Жизнь»

1. The Game of Life. – Time, January, 21, 1974
2. Helmers C. Lifeline – Byte, 1, September 1975, p. 72-80
3. Niemiec M. D. Life Algorithms – Byte. 4. January 1979, p. 90
4. Berlekamp E., Conway J. and Guy R. What is Life? In : Winning Ways, v. 2, - Academic Press, 1982